Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

Москва, октябрь 2020

В 4 и 5 классах олимпиада длилась 60 минут, в 6–8 классах — 90 минут, в 9–11 классах — 120 минут.

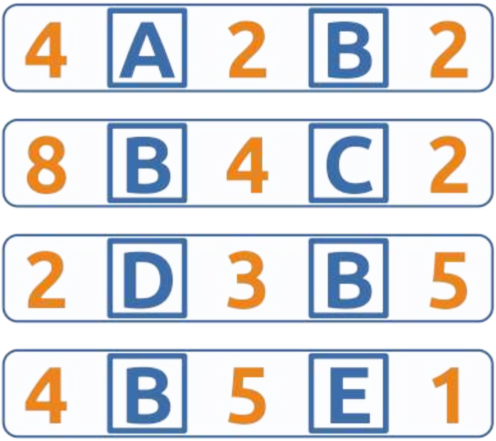
Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

4 класс

Задача 4.1. На доске были написаны четыре арифметических примера. Вера стёрла один знак «плюс», один знак «минус», один знак «умножить», один знак «делить», а также четыре знака «равно».

Вместо одинаковых знаков она написала одинаковые буквы, а вместо разных знаков — разные буквы. Восстановите примеры.



(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E

(1) должен стоять знак «плюс»
(2) должен стоять знак «умножить»
(3) должен стоять знак «минус»
(4) должен стоять знак «делить»
(5) должен стоять знак «равно»

Ответ: a4 b5 c2 d1 e3.

Решение. Заметим, что буква B встречается во всех примерах. Получается, что вместо буквы B должен стоять знак «равно»:

$$4\,A\,2 = 2$$
$$8 = 4\,C\,2$$
$$2\,D\,3 = 5$$
$$4 = 5\,E\,1$$

Теперь будем смотреть на примеры, начиная с последнего.

- Какой знак надо поставить между 5 и 1, чтобы получилось 4? Есть только один вариант — знак «минус».

- Какой знак надо поставить между 2 и 3, чтобы получилось 5? Есть только один вариант — знак «плюс».
- Какой знак надо поставить между 4 и 2, чтобы получилось 8? Есть только один вариант — знак «умножить».
- Какой знак надо поставить между 4 и 2, чтобы получилось 2? Есть два варианта — знак «минус» или знак «делить», но знак «минус» уже используется в другом примере, поэтому он нам не подходит.

Итак, наши примеры выглядят следующим образом:

$$4 : 2 = 2$$
$$8 = 4 \cdot 2$$
$$2 + 3 = 5$$
$$4 = 5 - 1$$

□

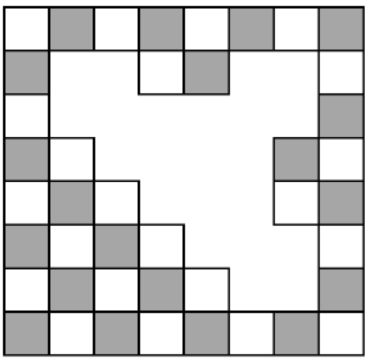
Задача 4.2. У Пети есть 25 монет, каждая из которых имеет номинал 1, 2, 5 или 10 рублей. Среди этих монет 19 — не двухрублёвые, 20 — не десятирублёвые, 16 — не однорублёвые. Сколько пятирублёвых монет у Пети?

Ответ: 5.

Решение. Раз среди Петиных монет 19 не двухрублёвых, то у Пети всего 6 двухрублёвых монет. Аналогично получается, что у Пети 5 десятирублёвых монет и 9 однорублёвых монет.

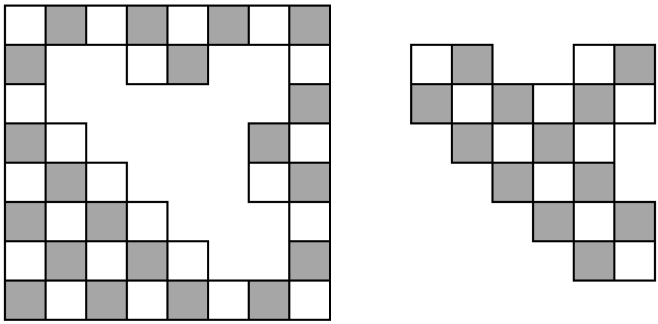
Таким образом, у Пети $25 - 6 - 5 - 9 = 5$ пятирублёвых монет. □

Задача 4.3. Термиты съели кусок старой деревянной шахматной доски. Сколько чёрных клеток они съели?



Ответ: 12.

Решение. Нарисуем фигуру, которую «выели термиты». Теперь мы можем без труда посчитать количество чёрных клеток, которые они съели.



□

Задача 4.4. В очереди в столовую стоят пять школьников: Аня, Боря, Вера, Гена и Денис.

- Боря стоит в начале очереди.
- Вера стоит рядом с Аней, но не рядом с Геной.
- Среди Ани, Бори и Гены никакие двое не стоят рядом.

Кто стоит рядом с Денисом?

Ответ: Аня и Гена.

Решение. Пронумеруем места в очереди от 1 до 5: место №1 — место в начале очереди, место №5 — в конце очереди.

Из первого условия мы понимаем, что Боря стоит на месте №1, а из третьего условия становится ясно, что Аня и Гена стоят на местах №3 и №5.

- Место №1 — Боря
- Место №2 — ?
- Место №3 — Аня или Гена
- Место №4 — ?
- Место №5 — Аня или Гена

Из второго условия следует, что Вера не может стоять на месте №4 (иначе рядом с ней стоят и Аня, и Гена). Тогда она точно стоит на месте №2, а рядом с ней (на месте №3) стоит Аня. Тогда на месте №4 может стоять только Денис.

- Место №1 — Боря
- Место №2 — Вера

- Место №3 — Аня
- Место №4 — Денис
- Место №5 — Гена □

Задача 4.5. Антон загадал трёхзначное число, а Лёша пытается его угадать. Лёша по очереди назвал числа 109, 704 и 124. Антон заметил, что каждое из этих чисел совпадает с загаданным числом ровно в одном разряде. Какое число загадал Антон?

Ответ: 729.

Решение. Заметим, что первое и третье число имеют общую цифру сотен 1, первое и второе имеют общую цифру десятков 0, второе и третье имеют общую цифру единиц 4.

Предположим, первая цифра загаданного числа 1. Тогда первое и третье число больше не имеют общих цифр с загаданным в одних и тех же разрядах, поэтому вторая цифра не 0 и не 2, а третья — не 4 и не 9. Но тогда второе число с загаданным общих цифр в одном и том же разряде иметь не может. Получили противоречие, поэтому первая цифра не равна 1.

Рассуждая аналогично, получим, что вторая цифра не равна 0 (иначе третье число не будет иметь с загаданным общих цифр в одном и том же разряде), а третья цифра не равна 4 (иначе первое число не будет иметь с загаданным общих цифр в одном и том же разряде).

Итак, второе число с загаданным может иметь только общую цифру сотен 7, третье — цифру десятков 2, первое — цифру единиц 9, т. е. загаданное число равно 729. □

Задача 4.6. Впишите вместо букв A, B, C, D, E цифры $1, 2, 3, 4, 5$ так, чтобы сумма цифр во всех прямоугольниках 1×3 (и горизонтальных, и вертикальных) равнялась 13. Каждая из цифр от 1 до 5 должна встречаться в таблице ровно один раз.

7	*A*	
B	**6**	*C*
D	*E*	**8**

(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E

(1) должна стоять цифра 1
(2) должна стоять цифра 2
(3) должна стоять цифра 3
(4) должна стоять цифра 4
(5) должна стоять цифра 5

Ответ: a3 b5 c2 d1 e4.

Решение. Сумма всех чисел в таблице равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, а в каждом из первых двух столбцов она равна 13. Значит, общая сумма чисел в таблице равна $36 = 13 + 13 + (8 + C)$, откуда $C = 2$.

Во второй строке сумма равна $13 = B + 6 + C = B + 6 + 2$, откуда $B = 5$.

В первом столбце сумма равна $13 = 7 + B + D = 7 + 5 + D$, откуда $D = 1$.

В нижней строке сумма равна $13 = D + E + 8 = 1 + E + 8$, откуда $E = 4$.

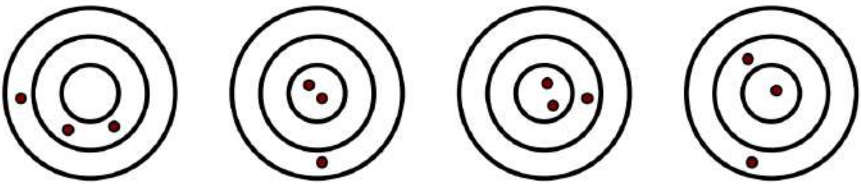
Во втором столбце сумма равна $13 = A + 6 + E = A + 6 + 4$, откуда $A = 3$.

Итак, искомая расстановка имеет следующий вид:

7	3	
5	6	2
1	4	8

□

Задача 4.7. Денис кидал дротики в четыре одинаковых поля для дартса: в каждое поле он кинул ровно три дротика, куда они попали, показано на рисунке. На первом поле он набрал 30 очков, на втором — 38 очков, на третьем — 41 очко. Сколько очков он набрал на четвёртом поле? (За попадание в каждую определённую зону — кольцо или центральное поле — даётся определённое количество очков.)



Ответ: 34.

Решение. «Сложим» первые два поля для дартса: получим 2 попадания в центральное поле, 2 попадания во внутреннее кольцо, 2 попадания во внешнее кольцо. Таким образом, сумма очков на первом и втором полях в два раза больше, чем количество очков, полученных за четвёртое поле.

Отсюда несложно получить ответ

$$(30 + 38) : 2 = 34.$$

□

Задача 4.8. В роще растут деревья четырёх видов: березы, ели, сосны и осины. Всего 100 деревьев. Известно, что среди любых 85 деревьев найдутся деревья всех четырёх видов. Среди какого наименьшего количества любых деревьев в этой роще обязательно найдутся деревья хотя бы трёх видов?

Ответ: 69.

Решение. Предположим, в роще не более 15 берёз. Тогда остальных деревьев хотя бы 85, а по условию задачи среди них должны найтись деревья всех четырёх видов. Противоречие. Значит, в роще хотя бы 16 берёз. Аналогично получаем, что деревьев каждого вида хотя бы 16.

Докажем, что среди любых 69 деревьев обязательно найдутся три различных дерева. Предположим, что это не так, и среди каких-то 69 деревьев оказались только два разных вида. Тогда среди оставшихся 31 дерева встречаются все деревья каких-то двух оставшихся видов, но, как было доказано ранее, каждый вид представлен хотя бы 16 деревьями. Противоречие.

Теперь приведём пример, когда среди некоторых 68 деревьев встречается не более двух видов (т. е. 68 деревьев может «не хватить»). Пусть в роще растут 34 берёзы, 34 ели, 16 сосен и 16 осин. Из предыдущих рассуждений мы понимаем, что среди любых 85 деревьев найдутся деревья всех четырёх видов (т. к. среди отсутствующих 15 деревьев не может содержаться какой-то вид целиком). При этом, если взять все берёзы и ели, суммарно 68 деревьев, то среди них не будет деревьев трёх видов. □

5 класс

Задача 5.1. После футбольного матча тренер построил команду в шеренгу, как показано на рисунке, и скомандовал: «В раздевалку бегут те, у кого номер меньше, чем у любого из соседей». После того, как несколько человек убежало, он повторил свою команду. Тренер продолжал до тех пор, пока не остался один игрок. Какой номер у Игоря, если известно, что после того как он убежал, в шеренге осталось 3 человека? (После каждой команды убегали один или несколько игроков, после чего шеренга смыкалась, и пустых мест между оставшимися игроками не оставалось.)

Ответ: 5.

Решение. Ясно, что после первой команды останутся игроки 9, 11, 10, 6, 8, 5, 4, 1. После второй команды останутся игроки 11, 10, 8, 5, 4. После третьей — 11, 10, 8, 5. После четвёртой — 11, 10, 8. Значит, у Игоря был номер 5. □

Задача 5.2. На урок физкультуры Алина, Богдан, Вика и Гриша пришли в шортах и футболках, причём каждый из этих предметов одежды был синего или красного цвета. У Алины и Богдана футболки были красные, а шорты — разного цвета. У Вики и Гриши футболки были разного цвета, а шорты — синие. Также известно, что у девочек футболки разные по цвету, да и шорты тоже. Кто из детей в какой одежде?

Ответ: Алина — красная футболка и красные шорты, Богдан — красная футболка и синие шорты, Вика — синяя футболка и синие шорты, Гриша — красная футболка и синие шорты.

Решение. У Алины и Вики по условию футболки разные, поэтому у Вики футболка синяя. Тогда у Гриши красная футболка. Значит, синяя футболка только у Вики.

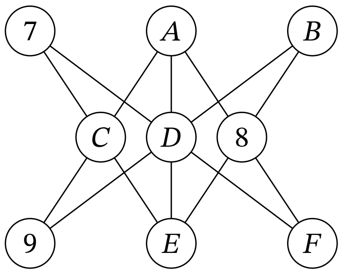
У Алины и Вики по условию шорты разные, поэтому у Алины красные шорты. Тогда у Богдана синие шорты. Значит, красные шорты только у Алины. □

Задача 5.3. К первому сентября Влад купил себе несколько шариковых и гелевых ручек. Он заметил, что если бы все купленные ручки были гелевыми, то он заплатил бы в 4 раза больше, чем вышло у него. А если бы все ручки были шариковыми, то покупка обошлась бы в 2 раза дешевле реальной. Во сколько раз гелевая ручка дороже, чем шариковая?

Ответ: 8.

Решение. Если бы все ручки были гелевыми, то их цена была бы в 4 раза больше реальной цены, что в свою очередь в 2 раза больше, чем если бы все ручки были шариковыми. Значит, гелевые ручки стоят в $4 \cdot 2 = 8$ раз больше шариковых. Следовательно, и одна гелевая ручка в 8 раз дороже, чем одна шариковая. □

Задача 5.4. Расставьте цифры от 1 до 6 (каждую нужно использовать ровно один раз) так, чтобы сумма трёх чисел, расположенных на каждой из 7 прямых, была равна 15. В ответе укажите, какие цифры должны стоять на местах A – F.



(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E
(f) Вместо буквы F

(1) должна стоять цифра 1
(2) должна стоять цифра 2
(3) должна стоять цифра 3
(4) должна стоять цифра 4
(5) должна стоять цифра 5
(6) должна стоять цифра 6

Ответ: $A = 4, B = 1, C = 2, D = 5, E = 6, F = 3$.

Решение. По условию A, D, E — различные цифры, не превосходящие 6, сумма которых равна 15. Если эти цифры брать максимально возможными, то их сумма $4 + 5 + 6 = 15$. Значит, A, D, E — это 4, 5, 6 в некотором порядке (если хотя бы одна из цифр не больше 3, то сумма всех трёх цифр не больше $3 + 5 + 6 < 15$).

При этом $A \neq 6$ (иначе $A + C + 9 > 15$) и $D \neq 6$ (иначе $B + D + 9 > 15$). Следовательно, $E = 6$.

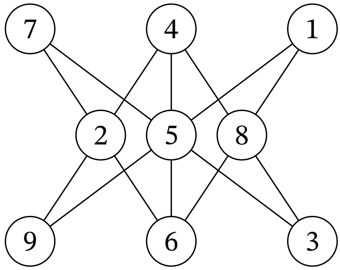
Поскольку $7 + C + E = 15$ и $E = 6$, получаем $C = 2$.

Поскольку $9 + C + A = 15$ и $C = 2$, получаем $A = 4$.

Поскольку $A + 8 + F = 15$ и $A = 4$, получаем $F = 3$.

Поскольку $7 + D + F = 15$ и $F = 3$, получаем $D = 5$.

Поскольку $9 + D + B = 15$ и $D = 5$, получаем $B = 1$.



Легко проверить, что полученная расстановка удовлетворяет всем условиям. □

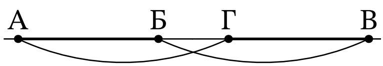
Задача 5.5. Дома Андрея, Бори, Вовы и Глеба расположены в некотором порядке на одной прямой улице. Расстояние между домами Андрея и Бори, как и расстояние между домами Вовы и Глеба, равно 600 м. Чему может равняться в метрах расстояние между домами Андрея и Глеба, если известно, что оно в 3 раза больше, чем расстояние между домами Бори и Вовы? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 900, 1800.

Решение. Для краткости будем дома жителей кратко обозначать первой буквой их имени. А двумя заглавными буквами подряд будем обозначать расстояние между домами соответствующих людей.

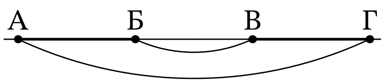
Не умаляя общности, А левее Б (иначе будем смотреть на всё с другой стороны улицы).

Сначала предположим, что В правее Г. Так как А левее Б на 600 м, а Г левее В на 600 м, то АГ равно БВ (если отрезок, соединяющий Б и В, мысленно перенести левее на 600 м, то получится отрезок, соединяющий А и Г). Но по условию они отличаются в 3 раза — противоречие.

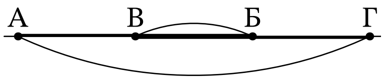


Значит, А левее Б, В левее Г. Поскольку АБ = ВГ, то В и Г не могут одновременно располагаться между А и Б, а также А и Б не могут одновременно располагаться между В и Г. Тогда возможны 4 случая расположения домов.

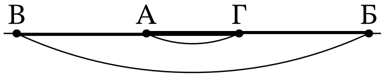
Случай 1. Порядок домов такой: А, Б, В, Г. Поскольку АБ $= 600$, БВ $= x$, ВГ $= 600$, то по условию $600 + x + 600 = 3x$, откуда $x = 600$, тогда АГ $= 1800$.



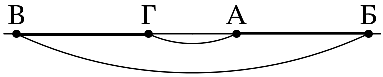
Случай 2. Порядок домов такой: А, В, Б, Г. Пусть БВ $= x$. Поскольку АБ $=$ ВГ $= 600$, то АВ $=$ БГ $= 600 - x$. Тогда по условию $(600 - x) + x + (600 - x) = 3x$, откуда $x = 300$, тогда АГ $= 900$.



Случай 3. Порядок домов такой: В, А, Г, Б. Легко видеть, что АГ не может быть больше БВ, противоречие.



Случай 4. Порядок домов такой: В, Г, А, Б. Легко видеть, что АГ не может быть больше БВ, противоречие.



Значит, возможны только два варианта: 900 и 1800. □

Задача 5.6. Ване на Новый Год подарили три набора конфет. В наборах три вида конфет: леденцы, шоколадные и мармеладные. Общее количество леденцов во всех трёх наборах равно общему количеству шоколадных конфет во всех трёх наборах, а также общему количеству мармеладных конфет во всех трёх наборах. В первом наборе шоколадных и мармеладных поровну, а леденцов на 7 больше. Во втором наборе леденцов и шоколадных одинаково, а мармеладных на 15 меньше. Сколько конфет в третьем наборе, если известно, что леденцов там нет?

Ответ: 29.

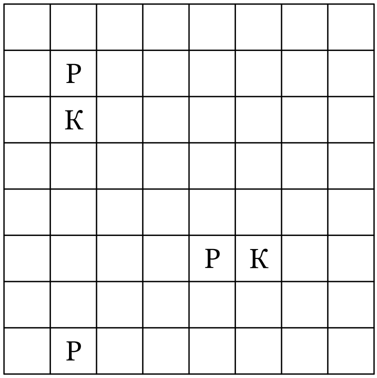
Решение. Леденцов больше, чем мармеладных конфет, в первом наборе на 7, а во втором на 15. Поскольку их суммарно во всех наборах поровну, а в третьем наборе леденцов 0, то мармеладных конфет там $7 + 15 = 22$.

Аналогично, леденцов больше, чем шоколадных конфет, в первом наборе на 7, а во втором на 0. Поскольку их суммарно во всех наборах поровну, а в третьем наборе леденцов 0, то шоколадных конфет там 7.

Тогда конфет в третьем наборе $22 + 7 + 0 = 29$. □

Задача 5.7. Мышонок Джерри решил подарить коту Тому на День Рождения пирог в виде квадрата 8×8. В три куска, отмеченные буквой «Р», он положил рыбу, в два куска, отмеченные буквой «К», положил колбасу, а ещё в один кусок добавил и то, и другое, но такой кусок не отметил (все остальные куски — без начинки). Также Джерри сообщил Тому, что в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой, а в любом квадрате 3×3 — не более одного куска с колбасой.

Какое наименьшее количество кусков пирога надо съесть Тому, чтобы среди них гарантированно оказался кусок с рыбой и колбасой?



Ответ: 5.

Решение. Кусок с рыбой и колбасой назовём *заветным.*

По условию в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой. В любом таком квадрате хотя бы один известный кусок с рыбой уже содержится; рассмотрим те квадраты, которые содержат только 1 известный кусок рыбы (все они прилегают к правой границе пирога). Можно увидеть, что у них есть общий прямоугольник 4×6 (серый на рис. 1). Значит, именно в нём и содержится заветный кусок.

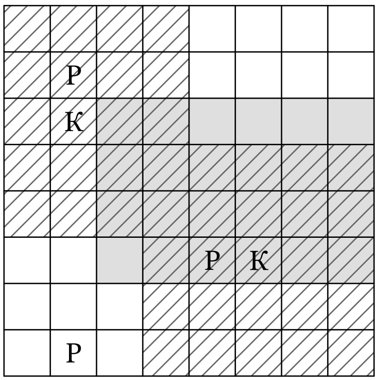
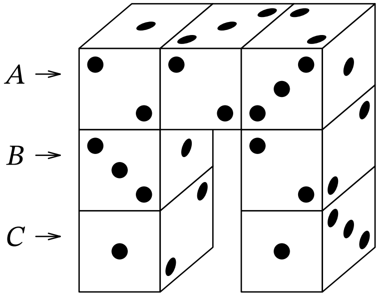


Рис. 1: к решению задачи 5.7

Далее, по условию в любом квадрате 3×3 не более 1 куска с колбасой. Значит, в любом таком квадрате, который уже содержит известный кусок колбасы, заветного куска не будет. Такие квадраты закрывают области 5×5 с центрами в каждом куске колбасы (заштрихованы на рисунке).

Остаётся ровно 5 клеток (серых, но не заштрихованных). Несложно проверить, что каждый из этих 5 случаев удовлетворяет условию задачи. Если Том съест не более 4 кусков пирога, то одна из перечисленных выше пяти клеток точно окажется не тронута, а в ней может находиться заветный кусок. А если Том съест 5 кусков в этих клетках, то среди них точно будет заветный. □

Задача 5.8. Есть 7 абсолютно одинаковых кубиков, у которых отмечены на одной грани 3 точки, на двух гранях по 2 точки, на остальных по 1. Из этих кубиков склеили фигуру в виде буквы «П», изображённую на рисунке, причём количество точек на любых двух соприкасающихся гранях одинаково.



Что находится на трёх левых гранях A, B и C?

Ответ: A — 2, B — 2, C — 3.

Решение. Для полного решения этой задачи необходимо не только понимание того, сколько точек расположено на гранях кубика и какие именно из них соседние. Также важно разобраться в том, по каким именно диагоналям направлены точки на гранях кубика.

Рассмотрим правый средний кубик (над и под которым есть ещё кубики). На его верхней грани, как и на его нижней грани, не могут стоять 3 точки (иначе у верхнего или у нижнего кубика было бы хотя бы две грани по 3 точки). Значит, грань с 3 точками — одна из двух оставшихся (которые не видны и ни с кем не соприкасаются). Тогда в нашем кубике напротив грани с 3 точками находится грань с 2 точками, одна из четырёх оставшихся граней имеет 2 точки, а остальные три — по 1 точке.

Рассмотрим средний верхний кубик. На верхней его грани 3 точки, на ближней — 2 точки. Ясно, что тогда на нижней грани этого кубика 2 точки, а на левой — 1 точка (рис. 2).

Рассмотрим средний верхний кубик и левый средний. Они абсолютно одинаковые, поэтому их можно совместить в пространстве («наложить» друг на друга). При этом грани с тремя точками должны совместиться; с учётом направлений этих точек понятно, что это можно сделать только двумя способами; один из этих способов невозможен, так как иначе видимая грань с 2 точками совместится с видимой гранью с 1 точкой. Значит, положение левого среднего кубика определено однозначно, и на его левой грани B, а также на задней грани по 2 точки. Тогда на его верхней и нижней грани по 1 точке.

У верхнего кубика верхняя, передняя и нижняя грань определены. Правая тоже — на ней

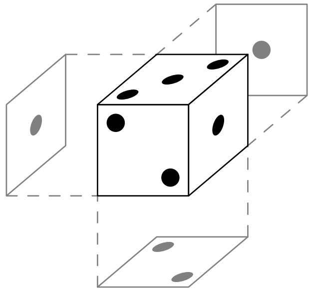


Рис. 2: к решению задачи 5.8; чёрным изображены три «настоящие» грани кубика; серым — вынесенные изображения трёх остальных граней.

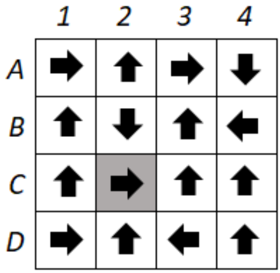
1 точка, т. к. на левой грани верхнего среднего кубика 1 точка. Тогда на грани A обязательно 2 точки, а на задней грани — 3 точки.

У нижнего кубика на передней и верхней грани по 1 точке, а на правой 2. Поскольку напротив грани с 3 точками не может находиться грань с 1 точкой, получаем, что на грани C 3 точки.

Итак, на грани A находятся 2 точки, на грани B — 2 точки, на грани C — 3 точки. Несложно убедиться, что все 7 кубиков можно расположить так, как на рисунке, чтобы все условия задачи выполнялись. □

6 класс

Задача 6.1. В квадрате 4×4 в отмеченной серым фоном клетке стоит фишка. За одно действие фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку, по направлению стрелочки, на которой стоит. Также после каждого перемещения стрелочка в клетке, где только что была фишка, меняется на противоположную. С какой клетки фишка выйдет за границу квадрата? В ответе укажите строку и столбец этой клетки.



(a) Строка A
(b) Строка B
(c) Строка C
(d) Строка D

(1) столбец 1
(2) столбец 2
(3) столбец 3
(4) столбец 4

Ответ: Строка A, столбец 2.

Решение. Легко видеть, что фишка пойдёт по маршруту

$$C2–C3–B3–A3–A4–B4–B3–C3–D3–D2–C2–C1–B1–A1–A2,$$

с клетки $A2$ она и выйдет с доски. □

Задача 6.2. В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов: A, B, C, D и E. Было сделано два прогноза, в каком порядке они финишируют.

- Первый прогноз: A — первый, B — второй, C — третий, D — четвёртый, E — пятый.
- Второй прогноз: C — первый, E — второй, A — третий, B — четвёртый, D — пятый.

Оказалось, что первом прогнозе было верно предсказано ровно про троих спортсменов, а во втором — ровно про двоих. Кто какое место занял в забеге?

Ответ: C — первый, B — второй, A — третий, D — четвёртый, E — пятый.

Решение. В первом прогнозе верно предсказано ровно про троих спортсменов, т. е. неверно предсказано про двоих. Значит, места, на которых эти двое финишировали, надо поменять друг с другом.

Также во втором прогнозе про каждого из пяти спортсменов предсказано не то же место, что и в первом прогнозе. Следовательно, про верно предсказанных троих спортсменов в первом прогнозе предсказано неверно во втором прогнозе. Тогда, поскольку во втором прогнозе верно предсказано про двоих, ими должны быть в точности те двое, про которых неверно предсказано в первом прогнозе.

Начнём перебирать, у каких спортсменов в первом прогнозе надо поменять места друг с другом. Во втором прогнозе у этих же двоих места должны совпасть с поменянными местами в первом.

Если это спортсмены A и B, то, поменяв их места, получим, что во втором прогнозе A должен быть вторым, а B — первым. Но это не так.

Если это спортсмены A и C, то, поменяв их места, убедимся, что во втором прогнозе A является третьим, а C — вторым. Тогда места троих остальных спортсменов B, D, E верно предсказаны в первом прогнозе: B — второй, D — четвёртый, E — пятый. Этот вариант удовлетворяет условиям задачи.

Если это спортсмены A и D, то, поменяв их места, получим, что во втором прогнозе A должен быть четвёртым, а D — первым. Но это не так.

Аналогично перебирая остальные возможные пары A и E, B и C, B и D, B и E, C и D, C и E, D и E, несложно убедиться в том, что A и C — единственно возможная пара, про которую неверно предсказано в первом прогнозе. $\square$

Другое решение. Отметим, что для каждого спортсмена прогнозы дают разные результаты, то есть в оба в сумме они могли угадать не более одного раза. Так как про всех пятерых прогнозы в сумме угадали пять раз, то про каждого спортсмена они угадали ровно по одному разу. Кроме того, это означает, что про каждое место прогнозы также угадали ровно по одному разу.

Значит, если бы первый прогноз угадал про первое место A, то второй бы не угадал про C (так как его прочили на первое место); тогда первый бы угадал про C.

Аналогично, если бы первый угадал про B, то первый угадал бы про E и, аналогично, про D.

Рассуждая так и далее, становится ясно, что про A и C первый прогноз одновременно угадал про обоих или не угадал ни про одного; аналогично с B, E и D. Так как всего первый прогноз угадал про троих спортсменов, то про B, D и E он угадал, а про A и C — нет. Со вторым прогнозом, соответственно, всё наоборот. $\square$

Задача 6.3. Три купца: Фома, Ерёма и Юлий встретились в Новгороде. Если Фома отдаст Ерёме 70 золотых монет, то у Ерёмы и Юлия будет поровну денег. Если Фома отдаст Ерёме 40 золотых монет, то у Фомы и Юлия будет поровну денег. Сколько золотых монет должен отдать Фома Ерёме, чтобы у них двоих стало поровну денег?

Ответ: 55.

Решение. Из первого условия следует, что у Юлия на 70 монет больше, чем у Ерёмы. Из второго условия следует, что у Фомы на 40 монет больше, чем у Юлия. Значит, у Фомы на $40 + 70 = 110$ монет больше, чем у Ерёмы. Чтобы денег у них стало поровну, Фома должен отдать Ерёме половину этой разницы, равную $\frac{110}{2} = 55$ монетам. □

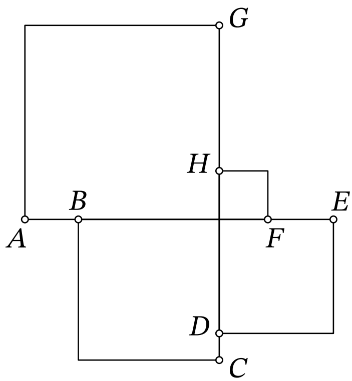
Задача 6.4. В прибрежной деревне 7 человек рыбачат каждый день, 8 человек рыбачат через день, 3 человека рыбачат раз в три дня, а остальные не рыбачат вовсе. Вчера рыбачили 12 человек, сегодня рыбачат 10 человек. Сколько людей будет рыбачить завтра?

Ответ: 15.

Решение. Посчитаем, сколько раз суммарно рыбачили за вчера и сегодня. 7 человек, которые рыбачат каждый день, рыбачили по 2 раза, т. е. суммарно рыбачили 14 раз. 8 человек, которые рыбачат через день, рыбачили ровно 1 раз, т. е. суммарно рыбачили 8 раз. Тогда суммарно эти 15 человек за вчера и сегодня рыбачили $14 + 8 = 22$ раза.

По условию за вчера и сегодня рыбачили $12 + 10 = 22$ раза. Следовательно, рыбаков, которые рыбачат раз в три дня, вчера и сегодня не было, и они все придут рыбачить завтра. Также завтра придут 7 человек, рыбачащих каждый день, а ещё придут $12-7 = 5$ рыбаков, рыбачащих через день. Значит, завтра придут рыбачить $3 + 7 + 5 = 15$ человек. □

Задача 6.5. На рисунке изображено 4 квадрата. Известно, что длина отрезка AB равна 11, длина отрезка FE равна 13, длина отрезка CD равна 5. Чему равна длина отрезка GH?



Ответ: 29.

Решение. Сторона самого большого квадрата (с вершиной A) больше стороны второго по величине квадрата (с вершиной C) на длину отрезка AB, равную 11. Аналогично, сторона второго по величине квадрата больше стороны третьего по величине квадрата (с вершиной E) на длину отрезка CD, равную 5. А его сторона больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка EF, равную 13. Итого, сторона большого квадрата больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка GH, равную $11 + 5 + 13 = 29$. □

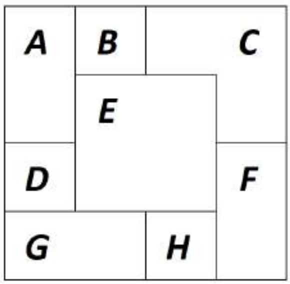
Задача 6.6. На фотографирование класса пришли 4 девочки и 8 мальчиков. Дети по двое подходят к фотографу и делают совместное фото. Среди какого наименьшего количества фотографий обязательно есть либо фотография двух мальчиков, либо фотография двух девочек, либо две фотографии с одними и теми же детьми?

Ответ: 33.

Решение. Пусть в некоторый момент нет ни фотографии двух мальчиков, ни фотографии двух девочек, ни двух фотографий с одними и теми же детьми. Тогда на каждой фотографии присутствуют мальчик и девочка, причём на разных фотографиях — разные пары. Но всевозможных пар, состоящих из мальчика и девочки, существует $4 \cdot 8 = 32$, и каждая из этих пар может быть запечатлена не более чем на одной фотографии. Значит, среди любых 33 фотографий обязательно найдётся либо фотография с людьми одного пола, либо две фотографии с одной и той же парой людей.

При этом не более 32 фотографий может не хватить: на них могут быть запечатлены разные пары, состоящие из мальчика и девочки. □

Задача 6.7. Восемь бумажных квадратов 2×2 последовательно выкладывали на стол, пока не получился большой квадрат 4×4. Последним на стол положили квадрат E. На рисунке изображено, как видны квадраты: квадрат E видно полностью, остальные квадраты видно частично. Какой квадрат положили на стол третьим по счёту?



Ответ: G.

Решение. Ясно, что разные квадраты выкладывали на разное место (иначе положенный последним полностью покрывал бы положенный ранее, но мы видим хотя бы по одной клетке от каждого квадрата).

Положения квадратов A, C, G и F можно определить сразу, так как они содержат угловые клетки.

Поскольку F не покрывает видимую клетку квадрата H, H был положен позже F. (Кроме того, теперь однозначно определяется положение квадрата H.)

Поскольку G покрывает клетку левее видимой клетки квадрата H, G был положен позже H.

Поскольку G не покрывает видимую клетку квадрата D, D был положен позже G.

Поскольку A покрывает клетку выше видимой клетки квадрата D, A был положен позже D. (И положение квадрата D теперь тоже определено.)

Поскольку A не покрывает видимую клетку квадрата B, B был положен позже A.

Поскольку C покрывает клетку правее видимой клетки квадрата B, C был положен позже B.

Квадрат E по условию положили последним.

Значит, квадраты выкладывались в порядке F–H–G–D–A–B–C–E, и третьим из них был G. □

Задача 6.8. Натуральное число n назовём *хорошим*, если 2020 при делении на n даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

Ответ: 10.

Решение. В последующем решении выражение вида a^k — число a в степени k — это число a, умноженное на себя k раз. Также будем считать $a^0 = 1$. Например, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, а $2^0 = 1$.

Поскольку 2020 при делении на n даёт остаток 22, то $2020-22 = 1998$ делится на n, а также $n > 22$ (поскольку остаток от деления меньше делителя). Значит, надо найти количество делителей числа 1998, которые больше 22. Очевидно, любое такое число является хорошим.

Разложим 1998 на простые множители: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Любой его делитель, делящийся на 37, больше 22, поэтому он является хорошим числом. Такие делители представляются в виде $2^a \cdot 3^b \cdot 37$, где a может принимать одно из значений $0, 1$ (2 варианта), b может принимать одно из значений $0, 1, 2, 3$ (4 варианта). Значит, таких делителей $2 \cdot 4 = 8$.

Теперь посчитаем количество делителей, не делящихся на 37. Такие делители представляются в виде $2^c \cdot 3^d$, где c может принимать одно из значений $0, 1$, а d может принимать одно из значений $0, 1, 2, 3$. Если $d < 3$, то такой делитель не превосходит $2 \cdot 3^2 < 22$, поэтому не является хорошим числом. Если $d = 3$, то такой делитель не меньше $3^3 > 22$, поэтому является хорошим числом. Таких делителей всего два: 3^3 и $2 \cdot 3^3$.

Итого хороших чисел $8 + 2 = 10$. □

Замечание. Зная, что $1998 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, можно просто выписать все 16 делителей этого числа и убедиться, что ровно 10 из них превосходят 22:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998\,.$$

7 класс

Задача 7.1. Петя записал на доску 20 натуральных чисел $1, 2, \ldots, 20$. Вася сначала стёр все чётные числа, а затем стёр все числа, дающие остаток 4 при делении на 5. Сколько чисел осталось на доске?

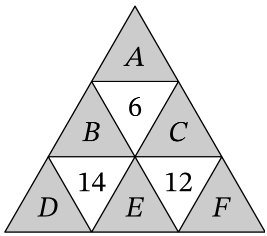
Ответ: 8.

Решение. После того, как стёрли все чётные числа, на доске остались:

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19.$$

Среди них ровно два дают остаток 4 при делении на 5 — это 9 и 19. После того как и их стёрли, на доске осталось 8 чисел. □

Задача 7.2. Денис разбил треугольник на девять треугольничков, как показано на рисунке, и расставил в них числа, при этом в белых треугольниках числа оказались равны суммам чисел в соседних с ними (по сторонам) серых треугольниках. После этого Лёша стёр числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и вместо них написал буквы A, B, C, D, E и F в некотором порядке. Получившаяся расстановка чисел и букв изображена на рисунке.



Где какие числа стояли первоначально?

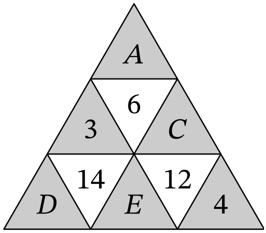
(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E
(f) Вместо буквы F

(1) стояло число 1.
(2) стояло число 2.
(3) стояло число 3.
(4) стояло число 4.
(5) стояло число 5.
(6) стояло число 6.

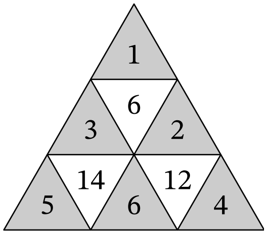
Ответ: a1 b3 c2 d5 e6 f4.

Решение. Заметим, что число 6 можно единственным образом представить в виде суммы трёх чисел из множества чисел от 1 до 6 — это $6 = 1 + 2 + 3$ (или те же числа, но в другом порядке).

Теперь посмотрим на числа B, D и E. Максимальное значение суммы $D + E$ — это сумма $5 + 6 = 11$, а максимальное значение B равно 3. По условию сумма этих чисел в точности равна 14. Таким образом, $B = 3$, D и E равны 5 и 6 (либо наоборот), A и C равны 1 и 2 (либо наоборот). Методом исключения получаем, что $F = 4$.



Максимальное значение суммы $C + E$ — это сумма $6 + 2 = 8$, а по условию $12 = C + E + 4$. Отсюда мы уже однозначно восстанавливаем всю расстановку чисел.



□

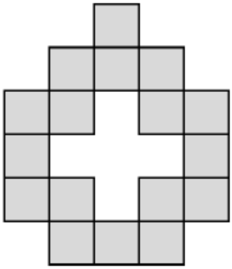
Задача 7.3. Листы в книге пронумерованы следующим образом: первый лист — это две страницы (с номерами 1 и 2), второй лист — это следующие две страницы (с номерами 3 и 4) и так далее. Хулиган Петя вырвал из книги несколько подряд идущих листов: первая вырванная страница имеет номер 185, а номер последней вырванной страницы состоит из тех же цифр, но идущих в другом порядке. Сколько листов вырвал Петя?

Ответ: 167.

Решение. Поскольку любой лист заканчивается на номер страницы, являющийся чётным числом, то номер последней вырванной страницы равен либо 158, либо 518. Но 158 нам не подходит, т. к. $158 < 185$. Значит, последняя страница заканчивается на номер 518.

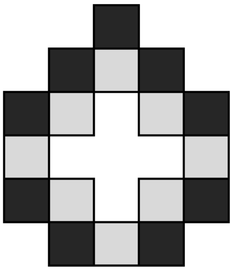
Теперь посчитаем количество вырванных страниц. Среди страниц от 1 до 518 не вырваны были страницы от 1 до 184. Значит, было вырвано $518 - 184 = 334$ страницы. Листов же в два раза меньше, а именно $334/2 = 167$. □

Задача 7.4. На рисунке изображена фигура, состоящая из 17 клеток. Сколько существует способов разрезать её на 8 прямоугольников 1×2 и один квадратик 1×1?



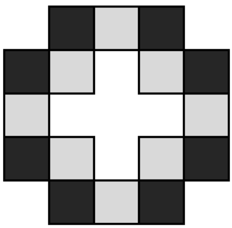
Ответ: 10.

Решение. Раскрасим фигуру в шахматную раскраску.



Легко видеть, что чёрных клеток 9, а серых — 8. Поскольку любой прямоугольник 1×2 занимает одну чёрную и одну серую клетку, то одноклеточный квадратик должен быть чёрного цвета.

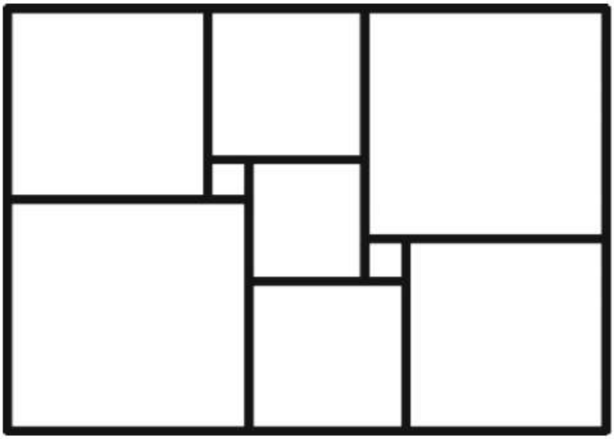
Если этот квадратик — «верхний», то после его вырезания получается следующая фигура.



Есть два способа разрезать её на прямоугольники 1×2.

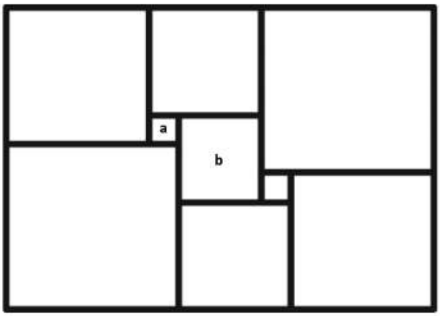
Если же вырезан другой чёрный квадратик, несложно проверить, что оставшуюся фигуру однозначно можно разрезать на прямоугольники 1×2. □

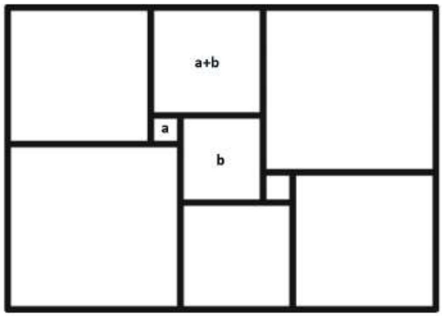
Задача 7.5. Прямоугольник разрезали на девять квадратов, как показано на рисунке. Длины сторон прямоугольника и всех квадратов — целые числа. Какое наименьшее значение может принимать периметр прямоугольника?

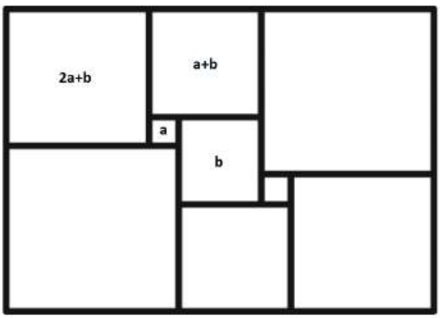


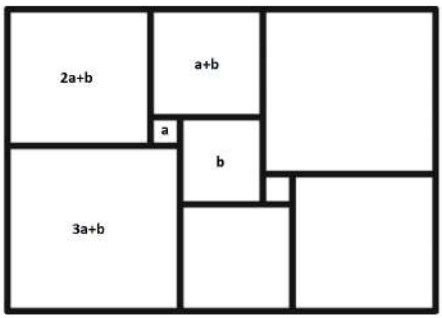
Ответ: 52.

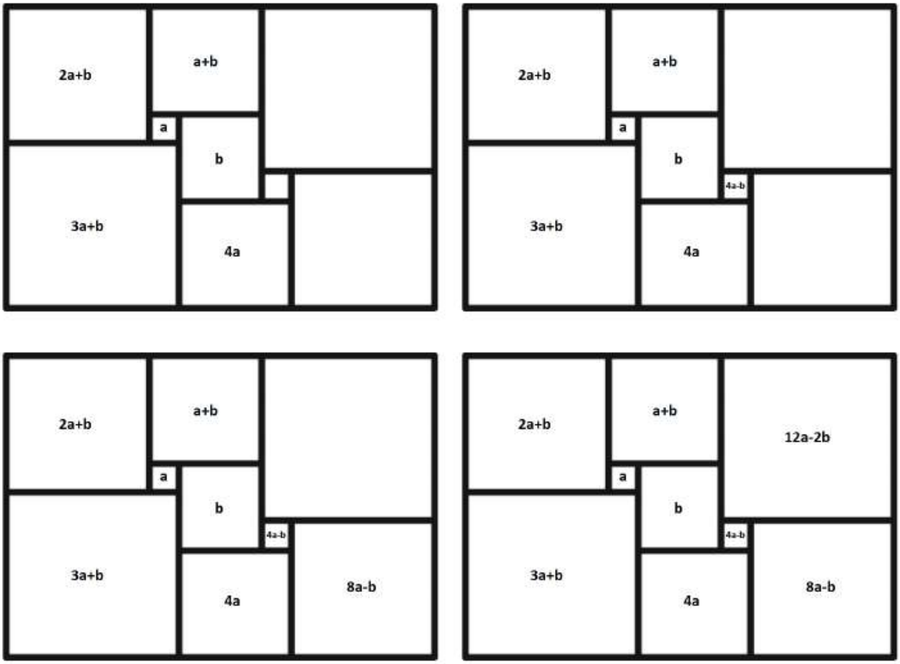
Решение. Внутри квадрата будем писать длину его стороны. Обозначим стороны двух квадратов за a и b и будем последовательно вычислять длины сторон квадратов.











Сумма длин сторон двух квадратов, примыкающих к левой стороне прямоугольника, равна сумме длин сторон двух квадратов, примыкающих к правой стороне прямоугольника. Получаем уравнение

$$(2a + b) + (3a + b) = (12a - 2b) + (8a - b),$$

$$5a + 2b = 20a - 3b,$$

$$b = 3a.$$

Таким образом, чтобы минимизировать периметр прямоугольника, надо выбрать $a = 1$, $b = 3$. Несложно проверить, что при этих значениях прямоугольник будет иметь размеры 11×15, а его периметр будет равен 52. □

Задача 7.6. Расстояние между городами А и Б составляет целое число километров. На дороге между городами каждый километр стоит табличка: на одной стороне написано расстояние до города А, на другой — до города Б. Слава шёл пешком из города А в город Б. В течение своего путешествия Слава посчитал для каждой таблички НОД чисел, написанных на ней. Оказалось, что среди посчитанных НОДов встречаются только числа 1, 3 и 13. Чему равняется расстояние между городами?

Ответ: 39.

Решение. Предположим, мы стоим около таблички, на которой написаны числа x и y. Если НОД$(x, y) = d$, то $(x + y) \vdots d$, т. е. расстояние между городами делится на все посчитанные НОДы.

Теперь предположим, что расстояние между городами (назовём его S) делится на некоторое натуральное число d. Тогда на расстоянии d километров от города А на табличке написаны числа d и $S - d$, НОД которых равен в точности d.

Из всего этого мы делаем вывод, что 1, 3 и 13 — это полный список делителей расстояния между городами (не считая самого расстояния). Значит, расстояние равно 39 километров.

□

Задача 7.7. В выборах на должность президента класса соревновались Петя и Вася. В течение трёх часов 27 учеников класса голосовали за одного из двух кандидатов. За первые два часа за Петю было отдано на 9 голосов больше, чем за Васю. А за последние два часа за Васю было отдано на 9 голосов больше, чем за Петю. В итоге Петя победил. С преимуществом в какое наибольшее количество голосов он мог победить?

Ответ: 9.

Решение. За последние два часа за Васю проголосовали хотя бы 9 человек. Значит, в итоге он набрал хотя бы 9 голосов. Тогда Петя набрал не более $27 - 9 = 18$ голосов. Тогда его преимущество в голосах не превосходит $18 - 9 = 9$.

Приведём теперь пример, как могло достигаться преимущество в 9 голосов. Пусть в течение первого часа 18 человек проголосовали за Петю, а в течение второго часа 9 человек — за Васю. Легко видеть, что все условия задачи выполняются, а Петя победил с преимуществом в 9 голосов. □

Задача 7.8. У Карлсона и Малыша есть несколько банок варенья, каждая весит целое число фунтов.

Суммарный вес всех банок варенья Карлсона в 13 раз больше суммарного веса всех банок Малыша. Карлсон отдал Малышу банку с наименьшим весом (из тех, что были у него), после чего суммарный вес его банок оказался в 8 раз больше суммарного веса банок Малыша.

Какое наибольшее количество банок варенья могло изначально быть у Карлсона?

Ответ: 23.

Решение. Все переменные в решении будут натуральными числами, поскольку веса всех банок по условию являются целыми числами.

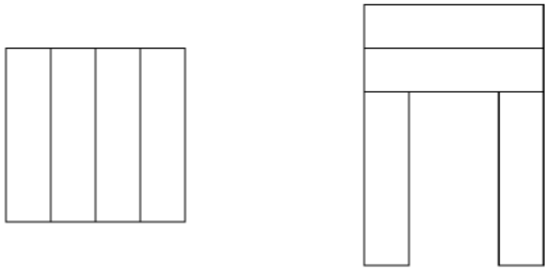
Пусть у Малыша изначально было суммарно n фунтов варенья, тогда у Карлсона было $13n$ фунтов варенья. Пусть Карлсон отдал свою наименьшую банку с a фунтами варенья. Тогда по условию $13n - a = 8(n + a)$, т. е. $5n = 9a$. Значит, $9a$ делится на 5, но тогда a делится на 5, т. е. $a = 5k$ для некоторого k. Тогда $5n = 9 \cdot 5k$, и $n = 9k$. Следовательно, изначально у Карлсона было несколько банок, в которых суммарно было $13 \cdot 9k = 117k$

фунтов варенья, причём наименьшая банка весит $5k$ фунтов. Но тогда банок у Карлсона не больше $\frac{117k}{5k} = 23{,}4$. Следовательно, их не больше 23.

23 банки у Карлсона быть могло. Пусть, например, у него была 1 банка весом 7 фунтов и 22 банки весом по 5 фунтов, а у Малыша 1 банка весом 9 фунтов. Тогда все условия выполняются: $117 = 13 \cdot 9$ и $117 - 5 = 8 \cdot (9 + 5)$. $\square$

8 класс

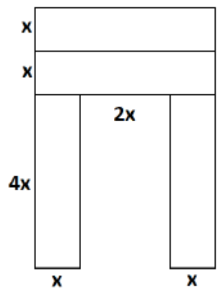
Задача 8.1. Квадрат разрезали на четыре равных прямоугольника, а из них сложили большую букву П, как на рисунке, периметр которой равен 56.



Чему равен периметр первоначального квадрата?

Ответ: 32.

Решение. Пусть ширина прямоугольника равна x. Из первого чертежа мы понимаем, что длина прямоугольника в четыре раза больше его ширины, то есть она равна $4x$. Теперь можно посчитать размеры буквы П.



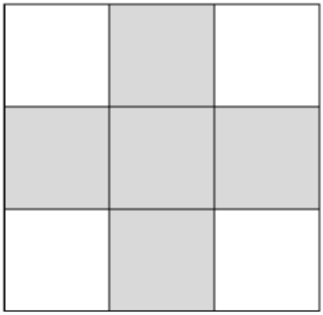
Отсюда получаем уравнение

$$28x = 56;$$

$$x = 2.$$

Периметр квадрата равен $16x = 32$. □

Задача 8.2. Числа от 1 до 9 расставили в клетки таблицы 3×3 так, что сумма чисел на одной диагонали равна 7, а на другой — 21. Чему равна сумма чисел в пяти закрашенных клетках?



Ответ: 25.

Решение. Заметим, что 7 можно представить единственным образом в виде суммы чисел от 1 до 9 — это $1 + 2 + 4 = 7$.

Посмотрим на другую диагональ с суммой 21. Наибольшее возможное значение суммы в ней равно $9 + 8 + 4 = 21$ (т. к. число в центральной клетке не больше 4). Поэтому в ней обязаны стоять числа 9, 8, 4.

Итак, в центральной клетке стоит число 4, а по углам стоят числа 1, 2, 8 и 9. Теперь несложно найти сумму чисел в закрашенных клетках: $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$. □

Задача 8.3. Четверо ребят гуляли вдоль аллеи и решили посчитать количество елей, высаженных вдоль неё.

- Аня сказала: «Вдоль аллеи всего 15 елей.»
- Боря сказал: «Количество елей делится на 11.»
- Вера сказала: «Елей точно меньше 25.»
- Гена сказал: «А я уверен, что их количество делится на 22.»

Один мальчик и одна девочка сказали правду, а остальные двое ошиблись. Сколько елей растёт вдоль аллеи?

Ответ: 11.

Решение. Пусть N — количество елей вдоль аллеи.

Предположим, Гена сказал правду, и N делится на 22. Но тогда N делится и на 11, т. е. и Боря сказал правду. Но по условию один из мальчиков ошибся. Значит, Гена всё же ошибся, но тогда Боря прав. Итак, N делится на 11, но не делится на 22.

Поскольку 15 не делится на 11, Аня точно ошиблась. Тогда Вера сказала правду, и $N < 25$. Но существует ровно одно число, меньшее 25, делящееся на 11 и не делящееся на 22, — это 11. Легко проверить, что $N = 11$ удовлетворяет всем условиям задачи. □

Задача 8.4. В классе учатся 20 человек. Размышляя, каким девочкам отправить валентинку на 14 февраля, каждый мальчик составил список из всех симпатичных ему девочек-одноклассниц (возможно, пустой). Известно, что не существует трёх мальчиков, у которых списки совпадают по количеству девочек. Какое наименьшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 6.

Решение. Обозначим количество девочек в классе за d. По условию нет трёх мальчиков, у которых списки совпадают по количеству девочек, значит, может быть максимум 2 пустых списка, 2 списка с одной девочкой, 2 списка с двумя девочками, ..., 2 списка с d девочками. Получается, что списков, как и мальчиков, не больше $2(d+1)$.

Общее количество детей в классе равно 20 и не превосходит $2(d+1)+d=3d+2$, откуда получаем, что $d \leqslant 6$.

Несложно понять, что такое могло произойти, если всего было 6 девочек и 14 мальчиков. У двух мальчиков списки должны быть пустыми, у двух других в списках должна быть 1 девочка, ещё у двух — 2 девочки, ..., у последних двух — 6 девочек (неважно, какие именно девочки присутствуют в списках, главное — их количество). Итого получается как раз 14 списков. □

Задача 8.5. На бал пришли дамы и джентльмены — всего меньше 50 человек. Во время первого танца лишь четверть дам не были приглашены на танец, и 2/7 от общего количество джентльменов никого не пригласили. Сколько человек пришло на бал? (Для танца некоторый джентльмен приглашает некоторую даму.)

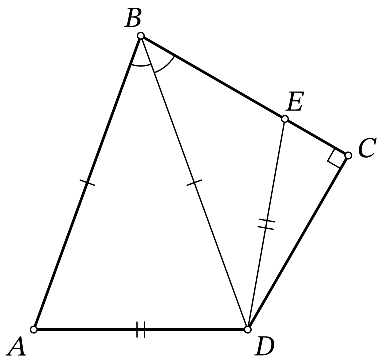
Ответ: 41.

Решение. Обозначим количество дам за n, а количество джентльменов за m. Посчитаем количество пар, которые танцевали. С одной стороны, оно равно $\frac{3}{4}n$, с другой стороны — $\frac{5}{7}m$. Приравнивая, находим отношение

$$\frac{n}{m}=\frac{20}{21}\,.$$

Поскольку дробь в правой части является несократимой, получаем, что $n=20k$ и $m=21k$ для некоторого натурального k. Осталось заметить, что общее количество людей $20k+21k=41k$ по условию меньше 50, поэтому подходит только $k=1$, а общее количество людей на балу равно $20+21=41$. □

Задача 8.6. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB=BD$, $\angle ABD=\angle DBC$, $\angle BCD=90^\circ$. На отрезке BC отмечена точка E такая, что $AD=DE$. Чему равна длина отрезка BD, если известно, что $BE=7$, $EC=5$?



Ответ: 17.

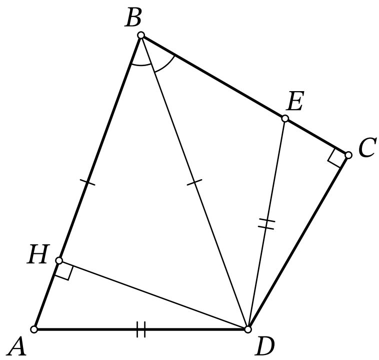


Рис. 3: к решению задачи 8.6

Решение. Опустим в равнобедренном треугольнике ABD высоту из точки D, пусть H — её основание (рис. 3). Поскольку этот треугольник остроугольный ($\angle ABD = \angle CBD < 90°$, $\angle BAD = \angle ADB = \frac{180° - \angle ABD}{2} < 90°$), точка H лежит на отрезке AB.

Заметим, что прямоугольные треугольники BDH и BDC равны по общей гипотенузе BD и острому углу при вершине B. Тогда $BH = BC$ и $DH = CD$.

Заметим теперь, что также равны прямоугольные треугольники ADH и EDC по гипотенузе $AD = ED$ и катету $DH = CD$. Тогда $EC = AH$.

Итак, $BD = BA = BH + AH = BC + EC = (7 + 5) + 5 = 17$. □

Задача 8.7. Про три действительных числа p, q и r известно, что

$$p + q + r = 5, \qquad \frac{1}{p+q} + \frac{1}{q+r} + \frac{1}{p+r} = 9.$$

Чему равняется выражение

$$\frac{r}{p+q} + \frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r}\,?$$

Ответ: 42.

Решение. Перемножим два данных равенства, получим

$$5 \cdot 9 = \frac{p+q+r}{p+q} + \frac{p+q+r}{q+r} + \frac{p+q+r}{p+r} = \left(1 + \frac{r}{p+q}\right) + \left(1 + \frac{p}{q+r}\right) + \left(1 + \frac{q}{p+r}\right).$$

Вычтем из обеих частей равенства 3, получим

$$\frac{r}{p+q} + \frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r} = 42\,. \qquad \square$$

Задача 8.8. Маша выписала на доску в порядке возрастания все натуральные делители некоторого числа N (самый первый выписанный делитель — 1, самый большой выписанный делитель — само число N). Оказалось, что третий с конца делитель в 21 раз больше второго с начала. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 441.

Решение. Второй делитель с начала — это наименьший простой делитель числа N, обозначим его p. Третий делитель с начала — это либо p^2, либо второй по величине простой делитель числа N, обозначим его q.

Случай 1. Третий делитель с начала — это p^2. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{p^2}$. По условию задачи

$$\frac{N}{p^2} = 21p;$$

$$N = 21p^3.$$

Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \leqslant 3$. Если $p = 2$, то третий по величине делитель числа N равен 3; если же $p = 3$, то третий по величине делитель числа N не больше 7, т. е. не 3^2. Противоречие.

Случай 2. Третий делитель с начала — это q. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{q}$. По условию задачи

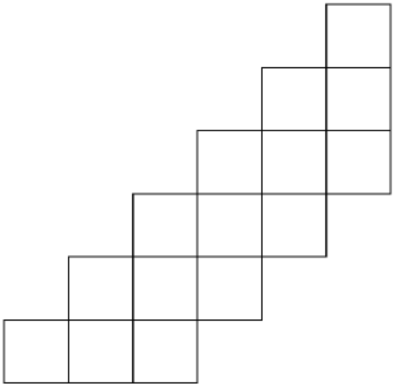
$$\frac{N}{q} = 21p;$$

$$N = 21pq.$$

Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \leqslant 3$, $q \leqslant 7$. Отсюда получаем, что $N \leqslant 441$. Несложно проверить, что это число удовлетворяет условию. $\square$

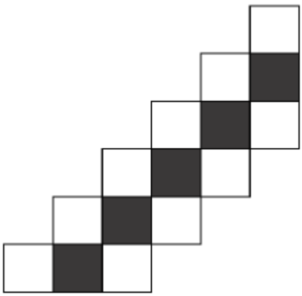
9 класс

Задача 9.1. Фигуру, изображённую на рисунке, разрезали на одноклеточные квадраты и прямоугольники 1×2. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×2 при этом могло получиться?

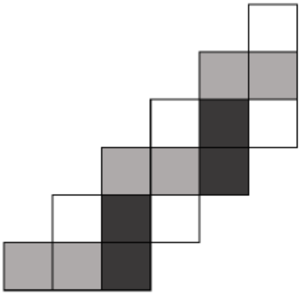


Ответ: 5.

Решение. Покрасим среднюю диагональ в чёрный цвет, как на рисунке.



Каждый прямоугольник 1×2 занимает одну чёрную и одну белую клетки. Поскольку чёрных клеток всего 5, то и таких прямоугольников не более 5. Пример того, как можно вырезать ровно пять прямоугольников, изображён ниже.



□

Задача 9.2. Антон, Вася, Саша и Дима ехали на машине из города А в город Б, каждый из них по очереди был за рулём. Весь путь машина ехала с постоянной скоростью.

Антон вёл машину в два раза меньше, чем Вася, а Саша вёл машину столько же, сколько Антон и Дима вместе взятые. Дима был за рулём лишь десятую часть пути. Какую часть пути за рулём был Вася? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,4.

Решение. Пусть Антон вёл машину a километров, Вася — b километров, Саша — c километров, Дима — d километров.

Антон вёл машину в два раза меньше, чем Вася. Значит, $2a = b$.

Саша вёл машину столько же, сколько Антон и Дима, вместе взятые. Значит, $c = a + d$.

Записав цепочку равенств $2a + 2c = 2a + c + c = b + c + (a + d)$, получим

$$a + c = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Следовательно, Антон и Саша суммарно на двоих вели машину половину пути, поэтому Вася и Дима суммарно вели машину вторую половину пути. Поскольку по условию Дима вёл 0,1 часть пути, Вася вёл машину 0,4 часть пути. □

Другое решение. Пусть доля пути, в течение которой Антон был за рулём, равна x. Тогда доля Васи равна $2x$, Димы — 0,1, а Саши — $0{,}1 + x$. Суммируя все доли, получаем $4x + 0{,}2$, что должно составить 1. Отсюда $x = 0{,}2$; а ответом будет $2x = 0{,}4$. □

Задача 9.3. К 30 пальмам в разных частях необитаемого острова прибито по табличке.

- На 15 из них написано: «Ровно под 15 табличками зарыт клад».
- На 8 из них написано: «Ровно под 8 табличками зарыт клад».
- На 4 из них написано: «Ровно под 4 табличками зарыт клад».
- На 3 из них написано: «Ровно под 3 табличками зарыт клад».

Известно, что правдивы только те таблички, под которыми клада нет.

Под каким наименьшим количеством табличек может быть зарыт клад?

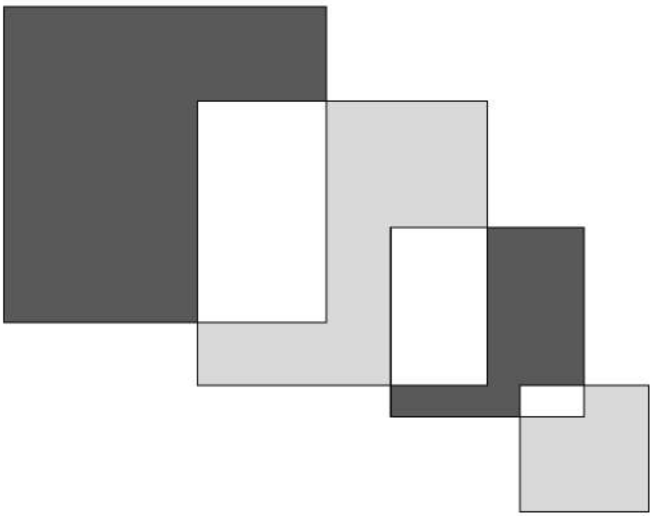
Ответ: 15.

Решение. Предположим, клад не зарыт хотя бы под 16 табличками. Тогда есть две таблички с различными надписями, под которыми клада нет. По условию записи на них обе должны быть правдивы, но они противоречат друг другу. Противоречие.

Значит, клад не зарыт максимум под 15 табличками. Таким образом, табличек, под которыми есть клад, хотя бы 15. Подходящий пример придумать несложно: пусть клады будут зарыты только под табличками, на которых написана одна из трёх следующих фраз.

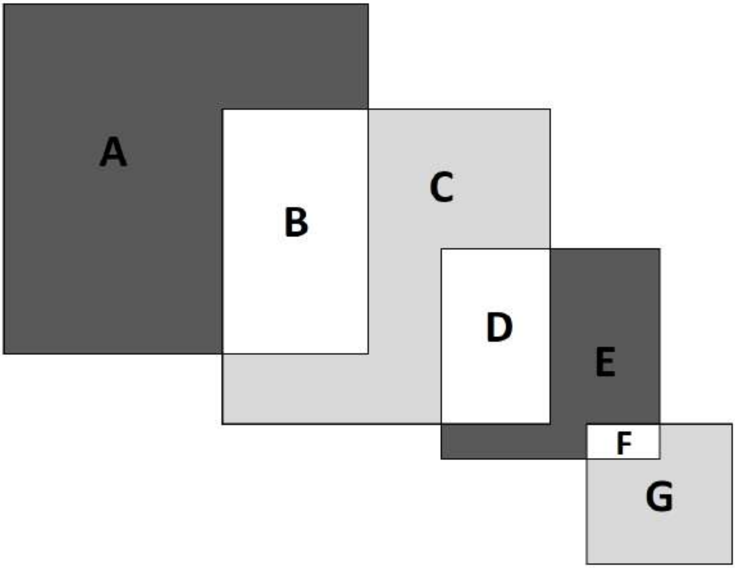
- «Ровно под 8 табличками зарыт клад».
- «Ровно под 4 табличками зарыт клад».
- «Ровно под 3 табличками зарыт клад». □

Задача 9.4. На рисунке слева направо изображены пересекающиеся квадраты со сторонами 12, 9, 7, 3 соответственно. На сколько сумма чёрных площадей больше, чем сумма серых площадей?



Ответ: 103.

Решение. Обозначим площади буквами A, B, C, D, E, F, G.



Вычислим искомую разность площадей:

$$\begin{aligned}A + E - (C + G) &= A - C + E - G = A + B - B - C - D + D + E + F - F - G = \\ &= (A + B) - (B + C + D) + (D + E + F) - (F + G) = \\ &= 12^2 - 9^2 + 7^2 - 3^2 = 103.\end{aligned}$$

□

Задача 9.5. У Буратино есть много монет по 5 и по 6 сольдо, каждого вида более 10 монет. Придя в магазин и купив книгу за N сольдо, он понял, что не сможет за неё рассчитаться без сдачи. Какое наибольшее значение может принимать натуральное N, если оно не больше 50?

Ответ: 19.

Решение. Легко проверить, что при $N = 19$ сдача необходима.

Заметим, что числа от 20 до 24 не подходят под условие, ведь за них можно было бы рассчитаться без сдачи: $N = 20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 5 + 6$, $22 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$, $23 = 5 + 3 \cdot 6$, $24 = 4 \cdot 6$.

Ясно, что тогда и числа от 25 до 50 не подходят под условие, ведь каждое из них является суммой одного или нескольких слагаемых, равных 5, а также числа от 20 до 24, являющегося суммой слагаемых, каждое из которых равно 5 и 6. □

Задача 9.6. На бал пришли 29 мальчиков и 15 девочек. Некоторые мальчики потанцевали с некоторыми девочками (не более одного раза в каждой паре). После бала каждый человек рассказал родителям, сколько раз он танцевал. Какое наибольшее количество различных чисел дети могли назвать?

Ответ: 29.

Решение. Наибольшее возможное число, которое могло быть названо, равно 29 (в случае, если есть девочка, которая потанцевала со всеми мальчиками), а наименьшее — 0. Таким образом, мы получили, что количество различных названных чисел не более 30.

Докажем, что ровно 30 быть не может. Предположим противное, пусть все числа от 0 до 29 были названы. Тогда числа от 16 до 29 названы только девочками (это уже 14 чисел). Число 0 назвал точно не мальчик, т. к. есть девочка, которая потанцевала со всеми мальчиками. Получается, что девочки должны назвать в точности пятнадцать чисел 0, 16, 17, 18, ..., 29.

При этом число 15 не названо ни одной из девочек, т. к. уже известно, какие числа они называли. Если бы число 15 назвал мальчик, то это значило бы, что он потанцевал со всеми девочками. Но есть девочка, назвавшая число 0, которая ни с кем не танцевала. Противоречие.

Теперь покажем, как могли быть названы 29 различных чисел. Пронумеруем девочек числами от 1 до 15, а мальчиков — числами от 1 до 29. Пусть мальчик i потанцевал с девочкой j в том и только в том случае, когда $i \geqslant j$.

Можно изобразить этот пример в виде таблицы 15×29: каждому мальчику поставим в соответствие столбец таблицы, каждой девочке — строку; если мальчик потанцевал с девочкой — будем закрашивать клетку на пересечении соответствующих строки и столбца. На рис. 4 над каждым столбцом написано, сколько в нём закрашенных клеток; слева от каждой строки написано, сколько в ней закрашено клеток. □

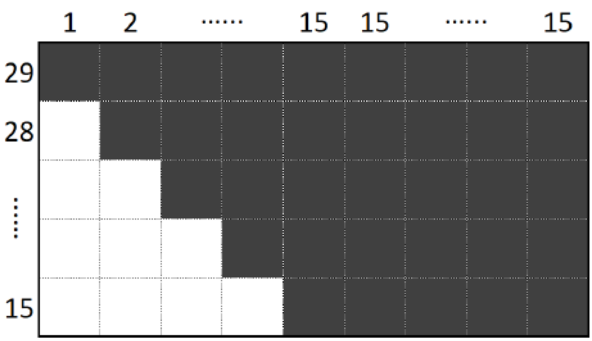
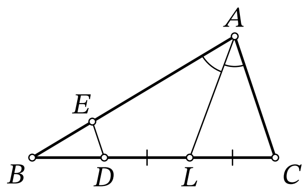


Рис. 4: пример к решению задачи 9.6

Задача 9.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точки E и D отмечены на отрезках AB и BL соответственно так, что $DL = LC$, $ED \parallel AC$. Найдите длину отрезка ED, если известно, что $AE = 15$, $AC = 12$.



Ответ: 3.

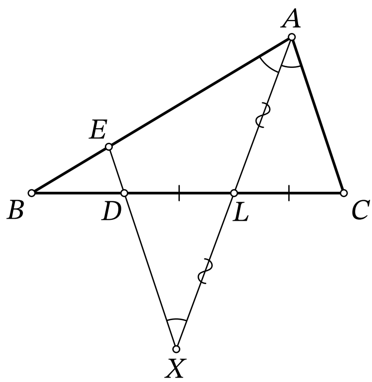


Рис. 5: к решению задачи 9.7

Решение. На луче AL за точкой L отметим точку X такую, что $XL = LA$ (рис. 5). Поскольку в четырёхугольнике $ACXD$ диагонали точкой пересечения L делятся пополам, он является параллелограммом (в частности, $AC = DX$). Следовательно, $DX \parallel AC$. Так как $AC \parallel ED$ по условию, то точки X, D, E лежат на одной прямой.

Поскольку $AC \parallel EX$, то $\angle EAX = \angle CAX = \angle AXE$, т. е. треугольник AEX — равнобедренный, $EA = EX$. Тогда

$$ED = EX - XD = EA - AC = 15 - 12 = 3. \qquad \square$$

Задача 9.8. Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что $a \geqslant b$ и выполнено

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}\,?$$

Ответ: 5.

Решение. Из условия следует, что $\frac{1}{6} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{b}$, откуда $b \leqslant 12$. Также $\frac{1}{6} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{b}$, поэтому $b > 6$. Значит, b может принимать значения от 7 до 12 включительно.

Используя $\frac{1}{a} = \frac{1}{6} - \frac{1}{b} = \frac{b-6}{6b}$, получаем

$$a = \frac{6b}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}\,.$$

Подставим возможные значения b и проверим, будет ли натуральным число a.

Если $b = 7$, то $a = 6 + \frac{36}{7-6} = 42$ — подходит.

Если $b = 8$, то $a = 6 + \frac{36}{8-6} = 24$ — подходит.

Если $b = 9$, то $a = 6 + \frac{36}{9-6} = 18$ — подходит.

Если $b = 10$, то $a = 6 + \frac{36}{10-6} = 15$ — подходит.

Если $b = 11$, то $a = 6 + \frac{36}{11-6} = 6 + \frac{36}{5}$ — не целое, не подходит.

Если $b = 12$, то $a = 6 + \frac{36}{12-6} = 12$ — подходит.

Легко понять, что все 5 пар $(42, 7)$, $(24, 8)$, $(18, 9)$, $(15, 10)$, $(12, 12)$ являются решениями исходного уравнения. □

Другое решение. Домножив уравнение на знаменатели (a и b — натуральные, поэтому на них можно умножать и делить), получим

$$6a + 6b = ab.$$

Это уравнение нетрудно преобразовать в следующее:

$$(a-6)(b-6) = 36.$$

Отсюда ясно, что числа $a-6$ и $b-6$ должны быть делителями 36, причём натуральными, так как если бы они были целыми отрицательными, то меньшее из них оказалось бы не больше -6, что невозможно.

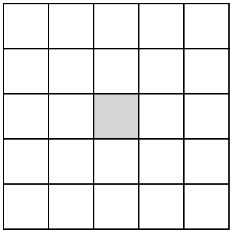
Первый сомножитель по условию не меньше второго. Перебрав возможные разложения

$$(a-6)(b-6) = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4 = 6 \cdot 6,$$

получим те же 5 решений. □

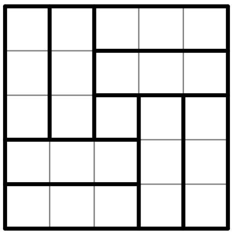
10 класс

Задача 10.1. В каждую клетку таблицы 5×5 невидимыми чернилами вписано натуральное число. Известно, что сумма всех чисел равна 200, а сумма трёх чисел, находящихся внутри любого прямоугольника 1×3, равна 23. Чему равно центральное число в таблице?



Ответ: 16.

Решение. Разобьём квадрат 5×5 без центральной клетки на четыре прямоугольника 2×3, а каждый из них разобьём на два прямоугольника 1×3.



Получится 8 прямоугольников 1×3, сумма чисел в каждом из которых равна 23. Поскольку сумма вообще всех чисел равна 200, находим число в центральной клетке как $200 - 23 \cdot 8 = 16$. □

Задача 10.2. Известно, что $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Ответ: 0,6.

Решение. Домножив равенство $\frac{a+b}{a-b} = 3$ на знаменатель, получим $a + b = 3a - 3b$. Перенеся a направо, а $3b$ налево, получим $4b = 2a$, откуда $a = 2b$. Подставив $a = 2b$ во второе выражение, получим

$$\frac{4b^2 - b^2}{4b^2 + b^2} = 0{,}6.$$ □

Задача 10.3. У Юры есть n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. После того, как Юра потерял одну из них, сумма чисел на оставшихся оказалась равна 101. Какое число написано на потерянной карточке?

Ответ: 4.

Решение. Предположим, что $n \leqslant 13$. Тогда $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \leqslant 91 < 101$. Какую бы карточку Юра ни потерял, в любом случае общая сумма получится меньше 101, противоречие.

Предположим $n \geqslant 15$. Потерянная карточка Юры содержит число не больше n, поэтому сумма оставшихся карточек не меньше $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \geqslant 105 > 101$, противоречие.

Следовательно, $n = 14$, а потерянное число равно $1 + 2 + \ldots + 14 - 101 = 105 - 101 = 4$. □

Задача 10.4. В центральной клетке доски 21×21 находится фишка. За один ход можно передвинуть фишку в соседнюю по стороне клетку. Алина сделала 10 ходов. Сколько существует клеток, где может оказаться фишка?

Ответ: 121.

Решение. Покрасим всю доску в шахматную раскраску так, чтобы центральная клетка доски была чёрной. При передвижении фишки в соседнюю по стороне клетку каждый раз будет меняться цвет клетки, на которой стоит фишка. Спустя нечётное число ходов фишка всегда оказывается на белой клетке, а спустя чётное число ходов — на чёрной. Следовательно, после 10 ходов фишка точно окажется на чёрной клетке.

Покажем, что во все чёрные клетки, в которые возможно попасть не более, чем за 10 ходов, можно попасть и ровно за 10 ходов. Рассмотрим произвольную чёрную клетку A, в которую можно попасть менее чем за 10 ходов из центральной. Поскольку к моменту попадания в клетку A было сделано чётное количество ходов, меньшее 10, то дальше можно просто передвигать фишку в соседнюю клетку и обратно, пока не будет сделано ровно 10 ходов. Значит, нам надо посчитать количество чёрных клеток, в которые можно попасть не более чем за 10 ходов.

За 0 ходов можно попасть только в начальную клетку, за 2 хода можно попасть в начальную клетку и в $4 \cdot 2 = 8$ новых клеток, за 4 хода можно попасть в те клетки, в которые уже попадали, и в $4 \cdot 4 = 16$ новых клеток и так далее. Получаем, что количество клеток, в которые можно попасть не более чем за 10 шагов, равно $1 + 8 + 16 + 24 + \ldots + 40 = 1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 121$. □

Замечание. Центры клеток, в которые можно попасть за $k \leqslant 10$ шагов, образуют вершины квадратной решетки, повёрнутой на 45° (рис. 6). Отсюда ясно, что всего таких клеток 11^2.

Задача 10.5. Хулиган Вася любит бегать по эскалатору в метро, причём вниз он бежит в два раза быстрее, чем вверх. Если эскалатор не работает, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 6 минут. Если эскалатор едет вниз, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 13,5 минут. Сколько секунд потребуется Васе, чтобы сбегать вверх и вниз по эскалатору, который будет ехать вверх? (Эскалатор всегда движется с постоянной скоростью.)

Ответ: 324.

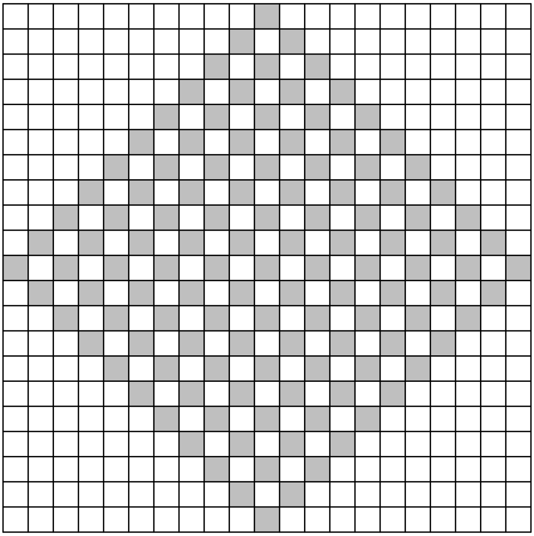


Рис. 6: к решению задачи 10.4

Решение. Обозначим длину эскалатора за 1, скорость Васи вниз по эскалатору за x, а скорость эскалатора за y (скорости выражаются в длине эскалатора, делённой на минуту). По условию $6 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x/2} = \frac{3}{x}$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

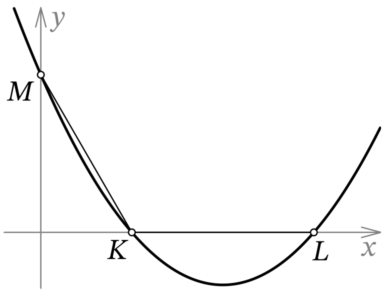
Из условия также следует, что $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x/2-y} = 13{,}5$. Подставив в это равенство $x = \frac{1}{2}$ и домножив его на произведение знаменателей, получим

$$\frac{1}{4} - y + \frac{1}{2} + y = \frac{27}{2}\left(\frac{1}{2} + y\right)\left(\frac{1}{4} - y\right).$$

Перенеся всё налево, получим квадратное уравнение $\frac{27}{2}y^2 + \frac{27}{8}y - \frac{15}{16} = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = \frac{1}{6}$ и $y_2 = -\frac{5}{12}$ (второй корень не подходит, т. к. скорость положительна).

Осталось вычислить значение выражения $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x/2+y}$. Подставив в него $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{6}$, получим 5,4 минуты. Переведя это в секунды, получим $5{,}4 \cdot 60 = 324$ секунды. $\square$

Задача 10.6. График квадратного трёхчлена $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трёх точках K, L и M, как на рисунке ниже. Оказалось, что $KL = KM$ и $\angle LKM = 120°$. Найдите корни данного трёхчлена.



Ответ: 0,5 и 1,5.

Решение. Обозначим начало координат за O, а меньший корень за p (тогда и длина отрезка KO равна p). По условию треугольник OMK прямоугольный с углом 30° при вершине M, поэтому $OM = \sqrt{3}KO = \sqrt{3}p$ и $KM = 2KO = 2p$. Также по условию $KL = KM$, поэтому $OL = p + 2p = 3p$, т. е. больший корень равен $3p$ (рис. 7).

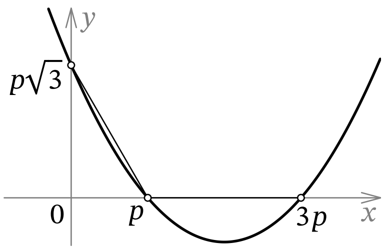


Рис. 7: к решению задачи 10.6

По теореме Виета произведение корней квадратного трёхчлена равно отношению свободного члена к старшему коэффициенту. Поскольку свободный член равен значению трёхчлена в нуле, т. е. длине отрезка OM, получаем уравнение

$$p \cdot 3p = \frac{\sqrt{3}p}{2/\sqrt{3}}.$$

Решая его, получаем $p = 1{,}5$. Следовательно, корни данного трёхчлена равны $p = 1{,}5$ и $3p = 4{,}5$. □

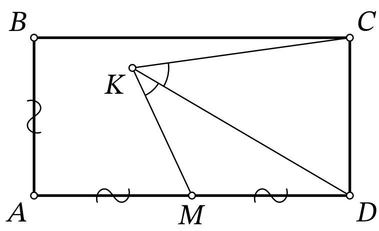
Задача 10.7. У Олега есть четыре карточки, на каждой из которых с одной и с другой стороны написаны натуральные числа (всего написано 8 чисел). Он рассматривает всевозможные четвёрки чисел, где первое число написано на первой карточке, второе — на второй, третье — на третьей, четвёртое — на четвёртой. Затем для каждой четвёрки он выписывает произведение чисел к себе в блокнот. Чему равна сумма восьми чисел на карточках, если сумма шестнадцати чисел в блокноте Олега равна 330?

Ответ: 21.

Решение. Обозначим числа на одной карточке за a и b, на другой — за c и d, на третьей — за e и f, на четвёртой — за g и h. По условию сумма 16 слагаемых вида $aceg+aceh+...+bdfh$ равна 330. Заметим, что эта же сумма получается при раскрытии всех скобок в выражении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$.

Следовательно, $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h) = 330 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$. Поскольку все числа являются натуральными, каждая из скобок больше 1. Значит, скобки равны числам 2, 3, 5, 11 в некотором порядке. Тогда их сумма равна $a+b+c+d+e+f+g+h = 2+3+5+11 = 21$. □

Задача 10.8. Прямоугольник $ABCD$ таков, что $AD = 2AB$. Точка M — середина стороны AD. Внутри прямоугольника нашлась точка K такая, что $\angle AMK = 80^\circ$ и луч KD является биссектрисой угла MKC. Сколько градусов составляет угол KDA?



Ответ: 35.

Решение. Начнём с предположения, что четырёхугольник $KMDC$ является вписанным (далее будет предложено несколько доказательств данного факта).

Воспользовавшись тем, что во вписанном четырёхугольнике $KMDC$ сумма противоположных углов равна 180°, получим $\angle MKD = \frac{\angle MKC}{2} = \frac{180^\circ-\angle MDC}{2} = 45^\circ$. Угол AMK как внешний для треугольника KDM равен сумме углов MKD и KDA, поэтому искомый угол KDA равен $80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$.

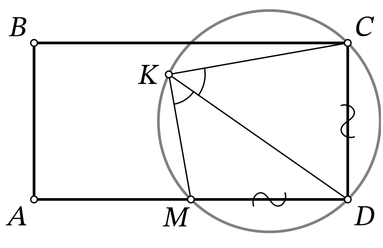


Рис. 8: к решению задачи 10.8

Приведём первое возможное доказательство вписанности четырёхугольника $KMDC$. Рассмотрим треугольник MKC и его описанную окружность. Заметим, что точка D лежит на биссектрисе угла MKC, а также равноудалена от вершин M и C (рис. 8). Но биссектриса угла неравнобедренного треугольника и серединный перпендикуляр к его противоположной стороне, как известно, пересекаются в середине «меньшей» дуги описанной окружности треугольника. Другими словами, D — середина дуги MC описанной окружности треугольника MKC, не содержащей точку K. Надо также заметить, что $MK \neq KC$ (иначе треугольники KMD и KCD оказались бы равны, но $\angle KMD > 90^\circ > \angle KCD$).

Приведём второе возможное доказательство вписанности четырёхугольника $KMDC$. Оно будет использовать четвёртый признак равенства треугольников: если у двух треугольников равны две стороны и угол не между ними, то эти треугольники либо равны, либо сумма других двух углов не между ними равна 180°. Четвёртый признак выполняется для треугольников MDK и CDK ($MD = DC$, DK — общая, $\angle MKD = \angle CKD$). При этом углы KMD и KCD не равны (опять же, первый — тупой, а второй — острый), поэтому их сумма равна 180°, а это и есть противоположные углы четырёхугольника $KMDC$. Следовательно, он является вписанным. $\square$

11 класс

Задача 11.1. Внутри круга нарисовано 16 радиусов этого круга и 10 окружностей, центры которых совпадают с центром круга. На сколько областей радиусы и окружности делят круг?

Ответ: 176.

Решение. 10 окружностей разбивают круг на 10 колец и один меньший круг, всего 11 частей. 16 радиусов разбивают каждую из 11 частей ещё на 16. Всего получается $11 \cdot 16 = 176$ областей. $\square$

Задача 11.2. Вдоль дороги в один ряд стоят 25 столбов. Иногда на один из столбов садится чиж, и сразу же с одного из соседних столбов взлетает чиж (если на соседних столбах в этот момент хоть кто-нибудь сидел). Также на каждом столбе не может сидеть более одного чижа.

Первоначально на столбах нет птиц. Какое наибольшее количество чижей могут одновременно находиться на столбах?

Ответ: 24.

Решение. Сперва покажем, что все столбы занять не удастся. Предположим, такое произошло. Рассмотрим чижа, который сел последним. Поскольку он занял последний незанятый столб, рядом с ним обязательно был занятый столб. Следовательно, чиж, который сидел на этом столбе, должен был улететь. Противоречие.

Теперь приведём пример того, как чижи могли занять 24 столба. Для удобства пронумеруем все столбы по порядку. Пусть первый чиж сядет на первый столб. Предположим, заняты все столбы с 1-го по k-й, где $k \leqslant 23$. Покажем, как получить ситуацию, где заняты все столбы с 1-го по $(k+1)$-й. Последовательно меняя k от 1 до 23, получим ситуацию, в которой будут заняты первые 24 столба.

Пусть заняты все столбы с 1-го по k-й, пусть тогда следующий чиж садится на $(k+2)$-й столб (где $k+2 \leqslant 25$), а следующий за ним чиж садится на $(k+1)$-й столб, и чиж с $(k+2)$-го столба улетает. Получаем ситуацию, где заняты все столбы с 1-го по $(k+1)$-й. $\square$

Задача 11.3. Натуральное число n назовём *интересным,* если $2n$ является точным квадратом, а $15n$ — точным кубом. Найдите наименьшее интересное число.

Ответ: 1800.

Решение. Разложим число n на простые множители. Чтобы число было квадратом, необходимо, чтобы в этом разложении все простые числа встречались в чётных степенях, а чтобы число было кубом, необходимо, чтобы все простые числа встречались в делящихся на 3 степенях.

Посмотрим, на какую степень двойки делится n. Во-первых, эта степень нечётная, т. к.

$2n$ — точный квадрат. Во-вторых, эта степень делится на 3, т. к. $15n$ — точный куб. Следовательно, минимальная степень двойки — это 3.

Теперь посмотрим, на какую степень тройки делится n. Во-первых, эта степень чётная, т. к. $2n$ — точный квадрат. Во-вторых, эта степень даёт остаток 2 при делении на 3, т. к. $15n$ — точный куб. Следовательно, минимальная степень тройки — это 2.

Для пятёрки аналогично получаем, что её минимальная степень — это 2.

Следовательно, n делится на $2^3 3^2 5^2 = 1800$, т. е. $n \geqslant 1800$. Несложно проверить, что $n = 1800$ удовлетворяет всем условиям задачи. $\square$

Задача 11.4. У Сени есть три прямых палки длиной 24 сантиметра каждая. Сеня разломил одну из них на две части так, что из двух кусков этой палки и двух целых палок он смог выложить контур прямоугольного треугольника. Сколько квадратных сантиметров составляет площадь этого треугольника?

Ответ: 216.

Решение. Пусть Сеня сломал одну из палочек на части длин a и $24-a$, назовём их *маленькими*, а палочки длины 24 назовём *большими*. Из четырёх палочек Сеня сложил треугольник, поэтому одна из сторон состоит из двух палочек, а две другие — из одной палочки.

Посмотрим, какие две палочки можно сложить вместе. Если сложить вместе две маленькие палочки, то получится равносторонний треугольник, а нам нужен прямоугольный. Если сложить две большие палочки в одну сторону, то она окажется больше суммы двух других сторон (что противоречит неравенству треугольника). Остаётся единственный вариант, когда складываются большая и маленькая палочки, а две другие стороны — это просто маленькая палочка и большая палочка (и это окажутся катеты, так как они короче первой стороны).

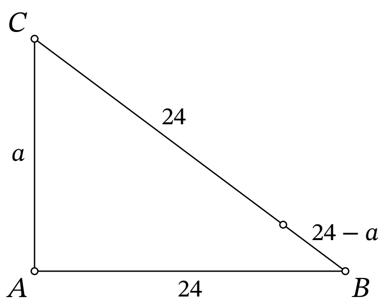


Рис. 9: к решению задачи 11.4

Итак, длины сторон прямоугольного треугольника имеют вид a, 24 и $48-a$ (рис. 9). Из теоремы Пифагора получим $a^2 + 24^2 = (48 - a)^2$. Преобразовав это равенство, находим, что $a = 18$. Следовательно, площадь треугольника равна $\frac{18 \cdot 24}{2} = 216$. $\square$

Задача 11.5. По зову воеводы пришли 55 солдат: лучники и мечники. Все они были одеты либо в золотые, либо в чёрные доспехи. Известно, что мечники говорят правду, когда носят чёрные доспехи и обманывают, когда носят золотые доспехи, а лучники — наоборот.

- На вопрос «На тебе золотые доспехи?» утвердительно ответили 44 человека.
- На вопрос «Ты лучник?» утвердительно ответили 33 человека.
- На вопрос «Сегодня понедельник?» утвердительно ответили 22 человека.

Сколько пришло лучников в золотых доспехах на зов воеводы?

Ответ: 22.

Решение. На первый вопрос утвердительно ответят лучники в золотых доспехах и лучники в чёрных доспехах, то есть все лучники.

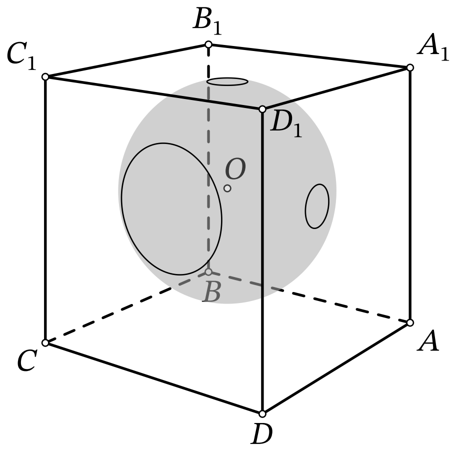
На второй вопрос утвердительно ответят лучники в золотых доспехах и мечники в золотых доспехах, то есть все солдаты в золотых доспехах.

На третий вопрос утвердительно ответят либо мечники в золотых доспехах и лучники в чёрных доспехах (если сегодня не понедельник), либо мечники в чёрных доспехах и лучники в золотых доспехах (если сегодня понедельник). В первом случае (если не понедельник) просуммируем количество утвердительных ответов на все три вопроса. Получится удвоенное количество мечников в золотых доспехах плюс удвоенное количество лучников, т. е. чётное число, но по условию оно равно $22 + 33 + 44 = 99$ и является нечётным — противоречие. Значит, на третий вопрос утвердительно ответили мечники в чёрных доспехах и лучники в золотых доспехах.

Просуммируем теперь количество утвердительных ответов. Получится утроенное количество лучников в золотых доспехах плюс количество всех остальных (по одному разу). Тогда, если вычесть из данного числа общее количество солдат, получится удвоенное количество лучников в золотых доспехах, которое надо поделить пополам:

$$\frac{22 + 33 + 44 - 55}{2} = 22. \qquad \square$$

Задача 11.6. Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен центр O сферы радиуса 10. Сфера пересекает грань AA_1D_1D по окружности радиуса 1, грань $A_1B_1C_1D_1$ по окружности радиуса 1, грань CDD_1C_1 по окружности радиуса 3. Найдите длину отрезка OD_1.



Ответ: 17.

Решение. Пусть ω — окружность, которую высекает сфера на грани CDD_1C_1. Из точки O

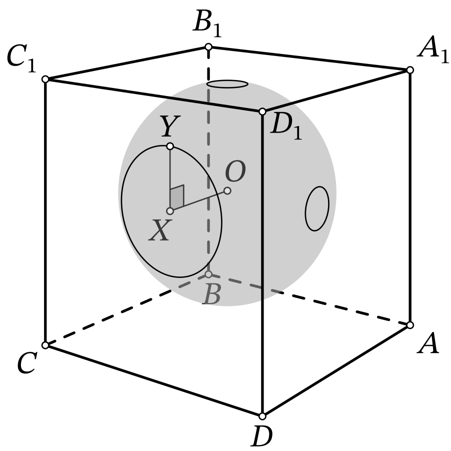


Рис. 10: к решению задачи 11.6

опустим перпендикуляр OX на эту грань, тогда точка X является центром ω (точка O равноудалена от всех точек ω, поэтому и проекция O на плоскость ω тоже от них равноудалена). Пусть Y — произвольная точка на ω (рис. 10). Треугольник OXY является прямоугольным; по условию $XY = 3$ и $OY = 10$. По теореме Пифагора получаем, что $OX^2 = 10^2 - 3^2 = 91$.

Аналогично находим квадраты расстояний от точки O до плоскостей $A_1B_1C_1D_1$ и ADD_1A_1, они будут равны по $10^2 - 1^2 = 99$.

По пространственной теореме Пифагора квадрат длины отрезка OD_1 равен сумме квадратов расстояний от точки O до трёх граней, содержащих точку D_1. Следовательно, $OD_1^2 = 91 + 99 + 99 = 289$, откуда $OD_1 = 17$. □

Задача 11.7. При каком наименьшем натуральном x выражение

$$\sqrt{29+\sqrt{x}}+\sqrt{29-\sqrt{x}}$$

является целым?

Ответ: 400.

Решение. Если возвести данное выражение в квадрат, получится $58+2\sqrt{29^2-x}$. Если начальное выражение являлось целым, то данное число является точным квадратом. Нам надо найти наименьшее x, т. е. данное выражение надо сделать наибольшим возможным точным квадратом. Заметим, что $58+2\sqrt{29^2-x} < 58+2\sqrt{29^2} = 116$. Наибольшим квадратом, меньшим 116, является число 100. Решая уравнение $58+2\sqrt{29^2-x} = 100$, получаем $x = 400$. Несложно проверить, что при $x = 400$ изначальное выражение действительно является целым. □

Задача 11.8. Дана возрастающая последовательность из 8 действительных чисел. Диана выписала всевозможные последовательности из 4 чисел, идущих в ней подряд. Оказалось, что две из пяти новых последовательностей являются арифметическими прогрессиями с разностями 4 и 36 соответственно, а одна из последовательностей является геометрической прогрессией. Найдите наибольшее из данных 8 чисел. Укажите все возможные варианты.

Ответ: 126, 6.

Решение. Предположим, арифметическая и геометрическая прогрессии из условия могут пересекаться хотя бы по трём элементам подряд. Пусть существуют три числа a, b, c, образующие арифметическую и геометрическую прогрессию одновременно. С одной стороны, это арифметическая прогрессия, поэтому $b-a = c-b$, т. е. $2b = a+c$. С другой стороны, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, т. е. $b^2 = ac$. Следовательно, $0 = (2b)^2 - 4b^2 = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$, т. е. $a = c$. Поскольку $2b = a+c = 2a$, то $a = b = c$. Но по условию разность каждой арифметической прогрессии не равна 0. Противоречие.

Следовательно, арифметическая и геометрическая прогрессии могут пересекаться не более чем по двум элементам. Также арифметические прогрессии с разной разностью не могут пересекаться друг с другом более чем по одному элементу подряд. Значит, единственный возможный вариант — это когда первые четыре и последние четыре числа образуют арифметическую прогрессию, а центральные четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим два случая в зависимости от того, которая из арифметических прогрессий имеет разность 4.

Случай 1. Пусть первые 4 числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Обозначим третье число за a, тогда четвёртое равно $a+4$. Обозначим пятое число за b, тогда шестое равно $b+36$. Данные четыре числа образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $\frac{a+4}{a} = \frac{b}{a+4} = \frac{b+36}{b}$. Приравняв первую и третью дробь, легко вывести, что $b = 9a$. Подставив $b = 9a$ в первое равенство, получим квадратное уравнение $8a^2 - 8a - 16 = 0$ с корнями $a_1 = -1$ и $a_2 = 2$. В первом случае получается последовательность $-9, -5, -1, 3, -9, 27, 63, 99$, но она не является возрастающей. Во втором случае получается последовательность $-6, -2, 2, 6, 18, 54, 90, 126$, и вот она уже подходит.

Случай 2. Пусть первые 4 числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 36. Аналогично предыдущему случаю, получим, что $\frac{a+36}{a} = \frac{b}{a+36} = \frac{b+4}{b}$. Как и в прошлом случае, несложно вывести, что $a = 9b$, а затем получить квадратное уравнение $8b^2 + 72b + 144 = 0$ с корнями $b_1 = -6$ и $b_2 = -3$. В первом случае получаем последовательность $-126, -90, -54, -18, -6, -2, 2, 6$, и она подходит. Во втором случае получается последовательность $-99, -63, -27, 9, -3, 1, 5, 9$, но она не является возрастающей.

Итак, возможны два варианта последовательности. Наибольшие числа в них равны 126 и 6 соответственно. □